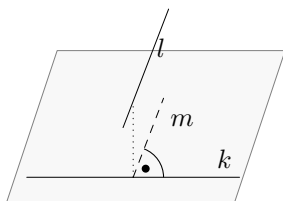


Przypomnienie z ostatniego wykładu

Definicja 1 (proste prostopadłe)

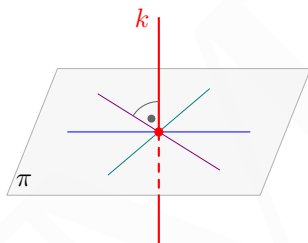
Dana jest przestrzeń, w której znajdują się proste ℓ i k . Mówimy, że są one *prostopadłe*, gdy:

- leżą na jednej płaszczyźnie i są prostopadłe lub
- istnieje prosta m równoległa do ℓ współpłaszczyznowa z k i do niej prostopadła.



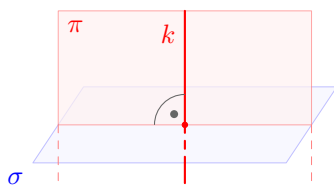
Definicja 2 (prosta prostopadła do płaszczyzny)

Prosta k jest *prostopadła do płaszczyzny* π , gdy jest prostopadła do każdej z prostych zawartych w tej płaszczyźnie.



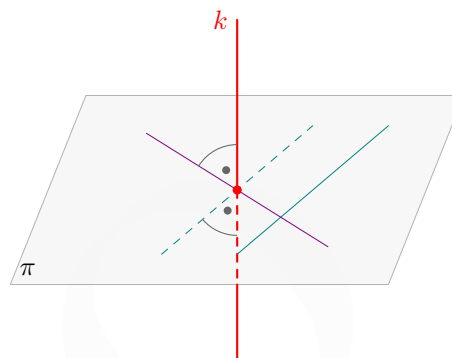
Definicja 3 (płaszczyzny prostopadłe)

Płaszczyzny π i σ są *prostopadłe* wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje prosta k zawarta w płaszczyźnie π prostopadła do płaszczyzny σ .



Twierdzenie 1

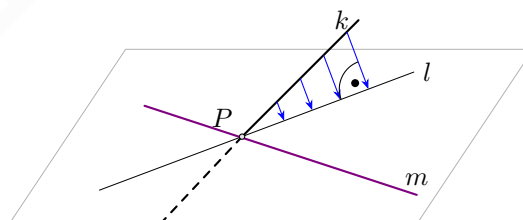
Prosta k jest prostopadła do płaszczyzny π wtedy i tylko wtedy, gdy jest prostopadła do pewnych dwóch nierównoległych prostych leżących w tej płaszczyźnie.



Twierdzenie 2 (o trzech prostych prostopadłych)

Prosta k przebija płaszczyznę w punkcie P pod kątem ostrym. Prosta ℓ jest rzutem prostokątnym prostej k na tę płaszczyznę. Prosta m leży na tej płaszczyźnie i przechodzi przez punkt P .

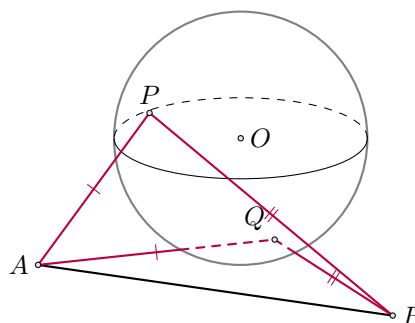
Wówczas prosta k jest prostopadła do prostej m wtedy i tylko wtedy, gdy m jest prostopadła do prostej ℓ .



Twierdzenie 3

Dana jest sfera o oraz takie punkty A i B , że prosta AB jest rozłączna ze sferą o . Prowadzimy dwie płaszczyzny przechodzące przez punkty A i B styczne do sfery o w punktach P i Q . Wówczas

- $AP = AQ$, $BP = BQ$,
- trójkąty APB i AQB są przystające.



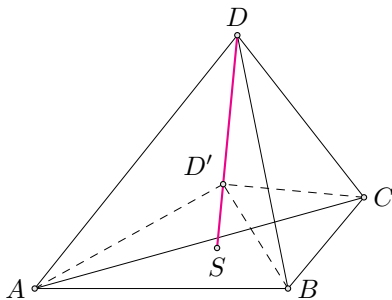
Twierdzenie 4

Objętość dowolnego ostrosłupa jest równa $\frac{1}{3}$ iloczynowi pola jego podstawy i długości wysokości poprowadzonej na tę podstawę.

Lemat 1

Punkt D' , różny od D i nieleżący na płaszczyźnie ABC , leży wewnątrz lub na brzegu czworościanu $ABCD$. Prosta DD' przecina płaszczyznę ABC w punkcie S . Wtedy

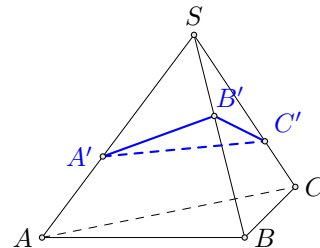
$$\frac{V(ABCD')}{V(ABCD)} = \frac{D'S}{DS}.$$



Lemat 2

Dany jest czworościan $ABCS$ i punkty A' , B' , C' leżące odpowiednio na krawędziach AS , BS , CS . Wtedy

$$\frac{V(A'B'C'S)}{V(ABCS)} = \frac{A'S}{AS} \cdot \frac{B'S}{BS} \cdot \frac{C'S}{CS}.$$



Kąty płaskie, dwuściennie i trójściennie

Definicja 4 (kąta dwuściennego)

Niech α i β będą dwiema półpłaszczyznami o wspólnej prostej k . Para tych półpłaszczyzn wraz z ograniczoną przez nie częścią przestrzeni nazywa się *kątem dwuściennym*, a prosta k jest jego *krawędzią*.

Definicja 5 (kąta trójściennego)

Niech O będzie punktem w przestrzeni. Jeśli trzy półproste OA , OB , OC nie leżą w jednej płaszczyźnie, to trzy półpłaszczyzny wyznaczone parami przez te półproste ograniczają część przestrzeni nazywaną *kątem trójściennym* o wierzchołku w punkcie O .

Definicja 6 (kąta wielościennego)

Kąt wielościenny to część przestrzeni domknięta skończoną liczbą kątów płaskich takich, że wszystkie kąty mają wspólny wierzchołek oraz każde dwa następne kąty mają wspólne ramię.

Definicja 7 (kąta bryłowego)

Niech O będzie punktem w przestrzeni. Jeśli z punktu O poprowadzimy wszystkie półproste przecinające pewien obszar S na powierzchni kuli o środku w O , to zbiór tych półprostych wyznacza *kąt bryłowy* o wierzchołku w punkcie O .

Twierdzenie 5

W dowolnym kącie trójściennym każdy z kątów płaskich jest mniejszy od sumy dwóch pozostałych kątów.

Twierdzenie 6

W dowolnym wypukłym kącie bryłowym suma kątów płaskich jest mniejsza od 360° .

Zadanie 1. Udowodnić Twierdzenie 5.

Zadanie 2. Udowodnić Twierdzenie 6.

Zadanie 3 (55OM-I-8). Punkt P leży wewnątrz czworościanu $ABCD$. Dowieść, że

$$\sphericalangle APB + \sphericalangle BPC + \sphericalangle CPD + \sphericalangle DPA > 360^\circ.$$

Zadanie 4 (Zwardoń 2001, Ł11). Udowodnić, że w dowolnym czworościanie istnieje wierzchołek, przy którym wszystkie kąty płaskie są ostre.

Zadanie 5 (Zwardoń 2006, P52). Niech α będzie kątem dwuściennym w czworościanie foremnym, natomiast β kątem dwuściennym w ośmiościanie foremnym. Rozstrzygnąć, czy $\sin^2(\alpha + \beta)$ jest liczbą wymierną.

Równoległościany opisane na czworokątach

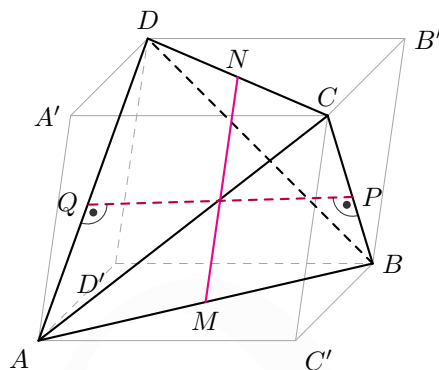
Przez każdą krawędź czworokąta $ABCD$ poprowadźmy płaszczyznę równoległą do przeciwległej krawędzi czworokąta. Płaszczyzny te wyznaczają równoległościan. W każdej z jego ścian jedna przekątna jest krawędzią czworokąta $ABCD$, a druga przekątna jest równa i równoległa do przeciwległej krawędzi tego czworokąta. Równoległościan ten nazywamy *równoległościanem opisanym* na czworokącie $ABCD$ (czasem mówi się też równoległościan dopisany), a czworokąt $ABCD$ *czworokątem wpisanym* w ten równoległościan. Okazuje się, że ta konstrukcja jest w wielu sytuacjach bardzo użyteczna.

Definicja 8 (biśrodkowa)

Biśrodkowa — odcinek łączący środki przeciwległych krawędzi w czworokącie.

Definicja 9 (biwysokość)

Biwysokość — odcinek prostopadły do dwóch przeciwległych krawędzi czworokąta, którego końce należą do prostych zawierających te krawędzie.



Lemat 3

Dla dowolnego równoległościanu zachodzi:

- biśrodkowe czworokąta są równoległe do odpowiednich krawędzi równoległościanu, a ich długości są równe długościom tych krawędzi,
- biwysokości są prostopadłe do przeciwległych płaszczyzn równoległościanu,
- środek ciężkości czworokąta pokrywa się ze środkiem ciężkości równoległościanu, a biśrodkowe czworokąta są przekątnymi tego równoległościanu,
- objętość czworokąta jest 3 razy mniejsza od objętości równoległościanu.

Lemat 4 (przypadki szczególne)

Gdy równoległościan opisany na czworokącie jest:

- sześciangiem wtedy i tylko wtedy, gdy czworokąt jest foremny.
- prostopadłością wtedy i tylko wtedy, gdy przeciwległe krawędzie czworokąta są równe,
- jest graniastopłosem prostym o podstawie równoległoboku wtedy i tylko wtedy, gdy w czworokącie są dwie pary przeciwległych krawędzi równych,
- jest rombościanem^a wtedy i tylko wtedy, gdy przeciwległe krawędzie są prostopadłe.

^aRomboedr, rombościan — równoległościan, którego każda ściana jest rombem.

Zadanie 6. W czworokącie $ABCD$ punkty K i L są środkami odpowiednio krawędzi AB i CD . Płaszczyzna π przechodzi przez punkty K i L oraz przecina krawędzie BC i AD tego czworokąta odpowiednio w punktach E i F . Wykazać, że środek odcinka EF leży na prostej KL .

Zadanie 7. Długości biśrodkowych pewnego czworokąta są równe a , b , c . Dowiedzieć, że objętość tego czworokąta nie przekracza $\frac{1}{3}abc$.

Zadanie 8. Udowodnić, że biśrodkowa jest prostopadła do każdej z dwóch biwysokości łączących pary pozostałych przeciwległych krawędzi czworokąta.

Zadanie 9. W czworokącie $ABCD$ zachodzą równości $AC = BD$ oraz $AD = BC$. Udowodnić, że środek sfery wpisanej i środek sfery opisanej na tym czworokącie leżą na prostej łączącej środki AB i CD .

Zadanie 10 (Zwardoń 2001, Ł5). Dany jest czworokąt foremny $ABCD$ o krawędzi długości 1. Punkty P i Q są środkami odpowiednio krawędzi AB i CD . Obliczyć odległość między prostymi AQ i CP .

Zadanie 11 (Zwardoń 2007, M2, P11). W czworoscianie $ABCD$ zachodzą równości

$$\sphericalangle BAC = \sphericalangle BCD \quad \text{oraz} \quad \sphericalangle ADC = \sphericalangle ABD.$$

Rozstrzygnąć, czy $AB = CD$.

Współpłaszczyznowość

Twierdzenie 7

Przecięciem dwóch płaszczyzn nierównoległych jest prosta. Jeśli te dwie płaszczyzny to π_1 i π_2 , a ponadto proste k i ℓ leżą odpowiednio na płaszczyznach π_1 oraz π_2 i przecinają się, to przecięcie $k \cap \ell$ tych prostych leży na przecięciu $\pi_1 \cap \pi_2$ płaszczyzn.

Lemat 5 (o współpłaszczyznowości czterech punktów)

Punkt D leży na płaszczyźnie ABC wtedy i tylko wtedy, gdy proste AB i CD lub AC i BD lub AD i BC mają punkt wspólny.

Zadanie 12. Dowieść, że środki krawędzi BD , BC , AC i AD czworoscian $ABCD$ leżą na jednej płaszczyźnie i są wierzchołkami równoległoboku.

Zadanie 13. W czworoscianie $ABCD$ punkty I_1, I_2, I_3, I_4 są środkami okręgów wpisanych w ściany. Czy mogą one leżeć na jednej płaszczyźnie?

Zadanie 14 (71OM-I-7). Ściany czworoscian $ABCD$ są trójkątami ostrokątnymi, a kąty dwuścienne przy krawędziach AB i CD są proste. Dowieść, że ortocentra trójkątów ABC , BCD , CDA , DAB leżą na jednej płaszczyźnie.

Zadanie 15 (77OM-II-3). Dany jest ostrosłup $ABCD$ o podstawie czworokąta wypukłego $ABCD$. Załóżmy, że dwusieczne kątów płaskich BAD , BSD i BCD mają punkt wspólny. Wykazać, że środki okręgów wpisanych w trójkąty ABS , BCS , CDS , DAS leżą na jednej płaszczyźnie.

Zadanie 16 (49OM-III-3). Pięciokąt wypukły $ABCDE$ jest podstawą ostrosłupa $ABCDES$. Płaszczyzna przecina krawędzie SA , SB , SC , SD , SE odpowiednio w punktach A' , B' , C' , D' , E' (różnych od wierzchołków ostrosłupa). Udowodnić, że punkty przecięcia przekątnych czworokątów $ABB'A'$, $BCC'B'$, $CDD'C'$, $DEE'D'$, $EAA'E'$ leżą na jednej płaszczyźnie.

Literatura

- Strona Olimpiady Matematycznej: <https://om.sem.edu.pl/>
- Strona Olimpiady Matematycznej Juniorów: <https://omj.edu.pl/>
- *Kącik przestrzenny* z czasopisma *Delta* autorstwa p. Michała Kiezy: <https://www.deltami.edu.pl/rubryki/kacik-przestrzenny/>
- *Zbiór zadań z geometrii przestrzennej* autorstwa p. Michała Kiezy
- *Seminarium OM dla nauczycieli* organizowane przez Komitet Główny OM