



Stereometria I

Tomasz Kossakowski

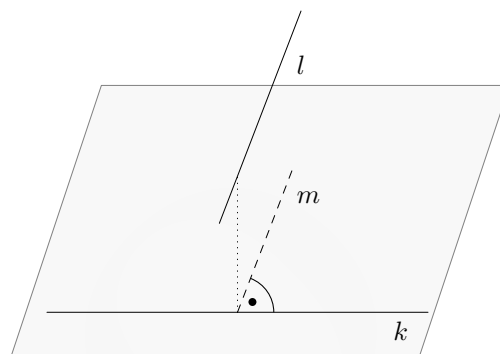
15 kwietnia 2026

Prostopadłość i równoległość

Definicja 1 (proste prostopadłe)

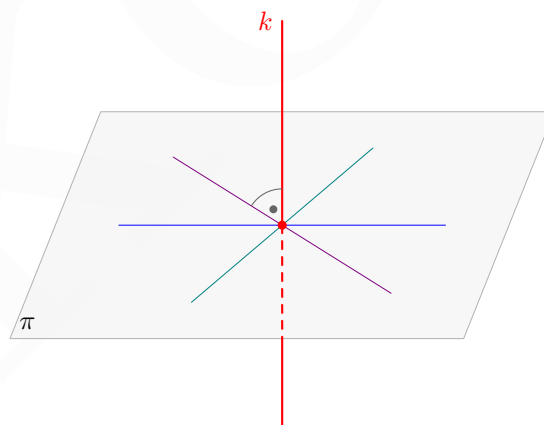
Dana jest przestrzeń, w której znajdują się proste ℓ i k . Mówimy, że są one *prostopadłe* wtedy i tylko wtedy, gdy zachodzi przynajmniej jeden z warunków:

- leżą na jednej płaszczyźnie i są prostopadłe,
- istnieje prosta m równoległa do ℓ współpłaszczyznowa z k i do niej prostopadła.



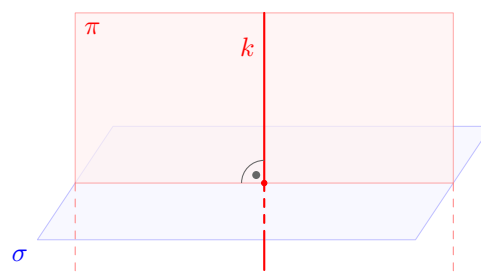
Definicja 2 (prosta prostopadła do płaszczyzny)

Mówimy, że prosta k jest *prostopadła do płaszczyzny* π wtedy i tylko wtedy, gdy jest prostopadła do każdej z prostych zawartych w tej płaszczyźnie.



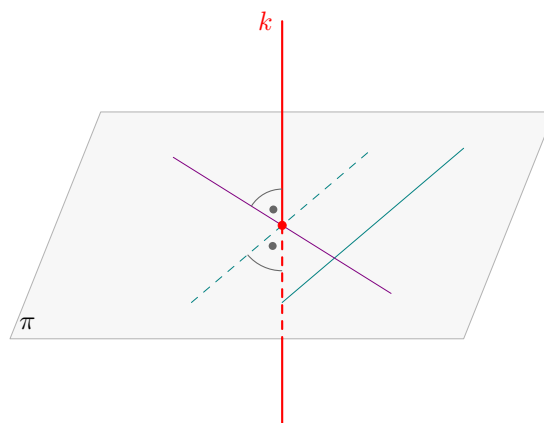
Definicja 3 (płaszczyzny prostopadłe)

Mówimy, że płaszczyzny π i σ są *prostopadłe* wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje prosta k zawarta w płaszczyźnie π prostopadła do płaszczyzny σ .



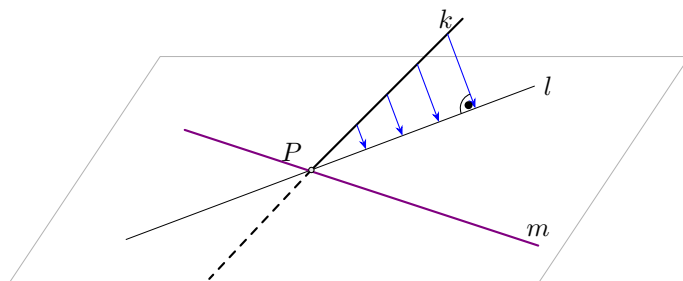
Twierdzenie 1

Prosta k jest prostopadła do płaszczyzny π wtedy i tylko wtedy, gdy jest ona prostopadła do pewnych dwóch nierównoległych prostych leżących w płaszczyźnie π .



Twierdzenie 2 (o trzech prostych prostopadłych)

Prosta k , niezawarta w płaszczyźnie π , przecina ją w punkcie P . Prosta ℓ jest rzutem prostokątnym prostej k na tę płaszczyznę. Prosta m leży na tej płaszczyźnie i przechodzi przez punkt P . Wówczas prosta k jest prostopadła do prostej m wtedy i tylko wtedy, gdy m jest prostopadła do prostej ℓ .



Definicja 4 (płaszczyzny równoległe)

Dwie płaszczyzny są *równoległe*, gdy się pokrywają lub gdy nie mają punktów wspólnych.

Definicja 5 (prosta równoległa do płaszczyzny)

Prosta jest *równoległa* do płaszczyzny, gdy nie ma z nią żadnego punktu wspólnego.

Ćwiczenie 1. Wpatrywać się w podane twierdzenia tak długo, dopóki się ich nie zrozumie.

Zadanie 1. Udowodnić, że jeśli w czworoscianie $ABCD$ krawędzie AB i CD są prostopadłe, to wysokości tego czworoscianu poprowadzone z wierzchołków C i D przecinają się.

Zadanie 2. Rozstrzygnąć, czy istnieje czworoscian, którego wszystkie ściany są trójkątami prostokątnymi.

Zadanie 3 (5 OMG, II etap, zadanie 5). Rozstrzygnąć, czy istnieje taki ostrosłup czworokątny, którego każda krawędź boczna jest prostopadła do pewnej krawędzi podstawy? Odpowiedź uzasadnić.

Zadanie 4 (62 OM, I etap, zadanie 11). W czworoscianie rozważamy dwusieczne trzech kątów płaskich mających wspólny wierzchołek. Wykazać, że jeżeli pewne dwie z tych dwusiecznych są prostopadłe, to wszystkie one są wzajemnie prostopadłe.

Zadanie 5 (10 OM, III etap, zadanie 3). Wykazać, że jeżeli w czworoscianie $ABCD$ wysokości poprowadzone z wierzchołków A i B przecinają się, to wysokości poprowadzone z wierzchołków C i D również mają punkt wspólny.

Zadanie 6 (49 OM, II etap, zadanie 6). Dany jest czworoscian $ABCD$. Dowieść, że krawędzie AB i CD są prostopadłe wtedy i tylko wtedy, gdy w przestrzeni istnieje taki równoległobok $CDPQ$, że $PA = PB = PD$ oraz $QA = QB = QC$.

Zadanie 7 (Mszana 2024, zadanie 17). W czworoscianie $ABCD$ zachodzą równości

$$\sphericalangle BAC + \sphericalangle BAD = \sphericalangle ABC + \sphericalangle ABD = 90^\circ.$$

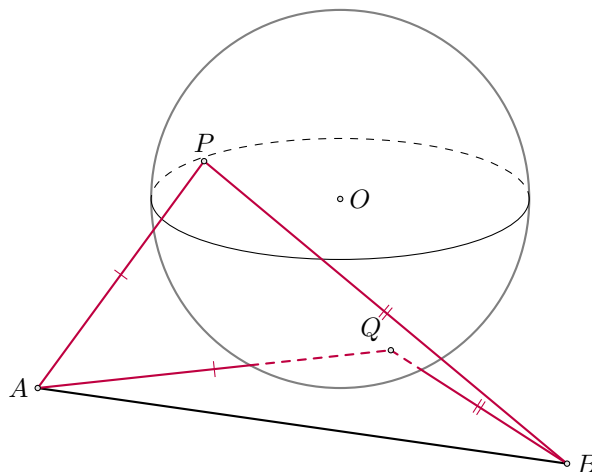
Niech O będzie środkiem okręgu opisanego na trójkącie ABC , zaś M środkiem krawędzi CD . Wykazać, że proste AB i MO są prostopadłe.

Najmocniejsze twierdzenie stereometrii

Twierdzenie 3

Dana jest sfera o oraz takie punkty A i B , że prosta AB jest rozłączna ze sferą o . Prowadzimy dwie płaszczyzny przechodzące przez punkty A i B styczne do sfery o w punktach P i Q . Wówczas

- $AP = AQ$,
- $BP = BQ$,
- trójkąty APB i AQB są przystające.



Zadanie 8 (8 OMG, I etap, zadanie 6). W ostrosłup $SABCD$, którego podstawą jest czworokąt wypukły $ABCD$, można wpisać sferę. Udowodnić, że

$$\sphericalangle ASB + \sphericalangle CSD = \sphericalangle BSC + \sphericalangle DSA.$$

Zadanie 9. Sfera wpisana w czworościan $ABCD$ jest styczna do ściany ABC w środku okręgu wpisanego w trójkąt ABC . Wykazać, że

$$\sphericalangle BAD = \sphericalangle CAD, \quad \sphericalangle ABD = \sphericalangle CBD, \quad \sphericalangle BCD = \sphericalangle ACD.$$

Zadanie 10 (IMO Longlist 1985 P93). Sfera wpisana w czworościan $ABCD$ jest styczna do ścian ABC i BCD odpowiednio w punktach P i Q . Dowieść, że $\sphericalangle APB = \sphericalangle CQD$.

Zadanie 11 (54 OM, III etap, zadanie 5). Sfera wpisana w czworościan $ABCD$ jest styczna do ściany ABC w punkcie H . Inna sfera jest styczna do ściany ABC w punkcie O oraz jest styczna do płaszczyzn zawierających pozostałe ściany czworościanu $ABCD$ w punktach, które do niego nie należą. Dowieść, że jeżeli O jest środkiem okręgu opisanego na trójkącie ABC , to H jest punktem przecięcia wysokości tego trójkąta.

Zadanie 12 (57 OM, III etap, zadanie 5). Dany jest czworościan $ABCD$, w którym $AB = CD$. Sfera wpisana w ten czworościan jest styczna do ścian ABC i ABD odpowiednio w punktach K i L . Dowieść, że jeżeli punkty K i L są środkami ciężkości ścian ABC i ABD , to czworościan $ABCD$ jest foremny.

Metoda siatek

W wielu zadaniach pomocne może być rozpatrzenie siatki wielościanu. Można wtedy zauważyć wiele rzeczy niewidocznych w rysunku przestrzennym.

Zadanie 13 (5ŚwKM-I-6¹). Dany jest sześcián o krawędzi długości 1. Obliczyć długość najkrótszej drogi łączącej dwa przeciwległe wierzchołki tego sześciánu, prowadzonej po jego powierzchni.

Zadanie 14. W czworościanie $ABCD$ suma kątów płaskich w każdym wierzchołku jest równa 180° . Wykazać, że przeciwległe krawędzie tego czworościanu są równej długości.

Zadanie 15. Dany jest czworościan $ABCD$, w którym

$$\sphericalangle BAC + \sphericalangle BDC = \sphericalangle BCA + \sphericalangle BDA = 180^\circ.$$

Dowieść, że $\sphericalangle BAD = \sphericalangle BCD$.

Zadanie 16 (2 OMG, II etap, zadanie 5). Trójkąt ABC jest podstawą ostrosłupa $ABCS$, w którym

$$\sphericalangle ASB = \sphericalangle BSC = \sphericalangle CSA = 20^\circ.$$

Wykazać, że obwód trójkąta ABC jest nie mniejszy od długości każdej z krawędzi AS , BS i CS .

Zadanie 17 (47 OM, III etap, zadanie 4). W czworościanie $ABCD$ zachodzą równości

$$\sphericalangle BAC = \sphericalangle ACD \quad \text{oraz} \quad \sphericalangle ABD = \sphericalangle BDC.$$

Dowieść, że krawędzie AB i CD są równej długości.

Zadanie 18 (51 OM, III etap, zadanie 4). W ostrosłupie prawidłowym o wierzchołku S i podstawie $A_1A_2 \dots A_n$ każda krawędź boczna tworzy z płaszczyzną podstawy kąt 60° . Dla każdej liczby naturalnej $n \geq 3$ rozstrzygnąć, czy można wybrać takie punkty $B_2, B_3, \dots, B_n$ leżące odpowiednio na krawędziach $A_2S, A_3S, \dots, A_nS$, że

$$A_1B_2 + B_2B_3 + B_3B_4 + \dots + B_{n-1}B_n + B_nA_1 < 2A_1S.$$

¹V Wojewódzki Konkurs Matematyczny dla uczniów klas I i II szkół średnich województwa świętokrzyskiego

Metoda objętości

Najczęstszym oznaczeniem objętości jest zapis $V(B)$, czyli objętość bryły B .

Twierdzenie 4

Objętość dowolnego ostrosłupa jest równa jednej trzeciej iloczynu pola jego podstawy i długości wysokości poprowadzonej na tę podstawę.

Lemat 1

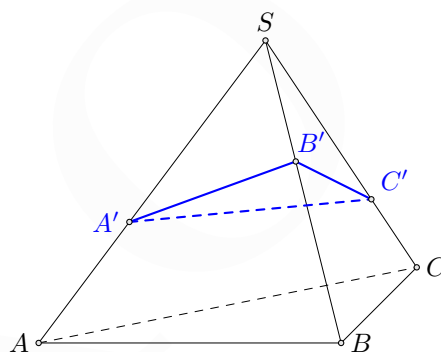
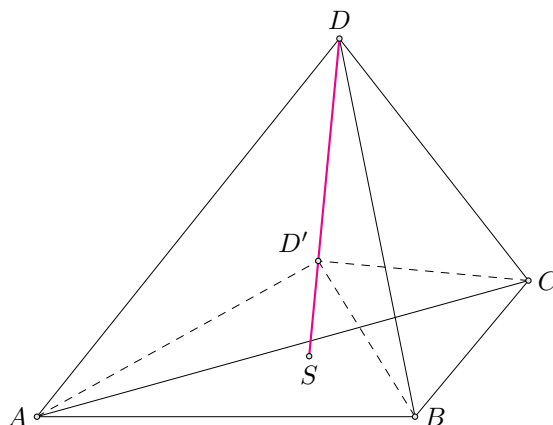
Punkt D' , różny od D i nieleżący na płaszczyźnie ABC , leży wewnątrz lub na brzegu czworoscianu $ABCD$. Prosta DD' przecina płaszczyznę ABC w punkcie S . Wtedy

$$\frac{V(ABCD')}{V(ABCD)} = \frac{D'S}{DS}.$$

Lemat 2

Dany jest czworoscian $ABCS$ i punkty A', B', C' leżące odpowiednio na krawędziach AS, BS, CS . Wtedy

$$\frac{V(A'B'C'S)}{V(ABCS)} = \frac{A'S}{AS} \cdot \frac{B'S}{BS} \cdot \frac{C'S}{CS}.$$



Zadanie 19. Udowodnić Lemat 1.

Zadanie 20. Udowodnić Lemat 2.

Zadanie 21. Dowieść, że jeżeli r oznacza długość promienia sfery wpisanej w dany czworoscian, a S oznacza sumę pól jego ścian, to objętość tego czworoscianu wynosi $rS/3$.

Zadanie 22. Niech P będzie dowolnym punktem wewnątrz czworoscianu foremnego $ABCD$. Niech K, L, M, N będą rzutami punktu P odpowiednio na płaszczyzny ABC, ABD, ACD oraz BCD . Niech h będzie wysokością tego czworoscianu. Udowodnić, że

$$PK + PL + PM + PN = h.$$

Zadanie 23 (14 OM, I etap, zadanie 11). Wewnątrz czworoscianu $ABCD$ wybrano punkt S . Proste AS, BS, CS, DS przecinają przeciwległe ściany czworoscianu $ABCD$ odpowiednio w punktach A', B', C', D' . Dowieść, że

$$\frac{SA'}{AA'} + \frac{SB'}{BB'} + \frac{SC'}{CC'} + \frac{SD'}{DD'} = 1.$$

Zadanie 24 (44 OM, II etap, zadanie 3). Punkty A_2, A_3 leżą na krawędzi OA_1 czworoscianu $OA_1B_1C_1$, przy czym

$$OA_1 > OA_2 > OA_3 > 0.$$

Punkty B_2, B_3 leżą na krawędzi OB_1 , a punkty C_2, C_3 leżą na krawędzi OC_1 , przy czym płaszczyzny $A_1B_1C_1, A_2B_2C_2, A_3B_3C_3$ są równoległe. Dla $i = \{1, 2, 3\}$, niech V_i oznacza objętość czworoscianu $OA_iB_iC_i$, a V objętość czworoscianu $OA_1B_1C_1$. Wykazać, że

$$V_1 + V_2 + V_3 \geq 3V.$$

Zadanie 25 (52 OM, III etap, zadanie 2). Dowieść, że suma odległości dowolnego punktu leżącego wewnątrz czworoscianu foremnego o krawędzi 1 od jego wierzchołków jest nie większa niż 3.

Literatura

- Strona Olimpiady Matematycznej: <https://om.sem.edu.pl/>
- Strona Olimpiady Matematycznej Juniorów: <https://omj.edu.pl/>
- Kącik przestrzenny z czasopisma Delta autorstwa p. Michała Kiezy: <https://www.deltami.edu.pl/rubryki/kacik-przestrzenny/>
- Zbiór zadań z geometrii przestrzennej autorstwa p. Michała Kiezy